

Аннотация

на диссертацию на соискание степени доктора философии (PhD)

по образовательной программе «8D05401 – Математика»

Линейные и нелинейные обратные задачи для эволюционных уравнений с
вырождением

Ашурова Гузел Рашитхужакызы

Актуальность темы: Обратные задачи для дифференциальных уравнений играют важную роль в различных областях науки и техники, таких как физика, инженерия, биология и медицина. Они позволяют восстанавливать неизвестные параметры или начальные условия системы на основе наблюдений её поведения. Особый интерес представляют линейные и нелинейные обратные задачи для вырождающихся параболических уравнений, поскольку такие уравнения описывают множество важных процессов, включая теплопроводность, диффузию и динамику различных сред.

Параболические уравнения, особенно в их вырождающейся форме, характеризуются наличием особенностей, таких как изменение типа уравнения в зависимости от времени и пространства, что делает задачу их исследования особенно сложной и актуальной. Вырожденные параболические уравнения возникают, например, при описании процессов теплопроводности в средах с фазовыми переходами или в неоднородных материалах, где теплопроводность может стремиться к нулю.

Изучение разрешимости обратных задач для таких уравнений включает в себя разработку методов восстановления коэффициентов уравнения, начальных и граничных условий по заданным данным. Эти задачи обычно формулируются как задачи оптимизации или задачи на экстремумы, что требует применения методов функционального анализа, теории операторов и численных методов.

Основная цель данной диссертационной работы заключается в исследовании разрешимости линейных и нелинейных обратных задач для вырождающихся параболических уравнений. Это включает:

Анализ существующих методов решения обратных задач для вырождающихся параболических уравнений и их обобщение на нелинейные случаи.

Разработка новых методов и алгоритмов для решения таких задач, с учётом специфики вырождающихся уравнений. Проведение теоретического анализа разрешимости задач, включая доказательство теорем существования и единственности решений. Применение разработанных методов к практическим задачам, таким как восстановление коэффициентов теплопроводности в неоднородных средах или определение источников тепла в сложных системах.

Таким образом, данная работа направлена на углублённое изучение и развитие методов решения обратных задач для вырождающихся параболических уравнений, что имеет важное теоретическое и практическое значение для различных областей науки и техники.

Наличие в обратных задачах дополнительных неизвестных функций требует, чтобы, помимо граничных условий, естественных для того или иного класса дифференциальных уравнений, задавались также некоторые дополнительные условия - условия переопределения. В настоящей работе будут использоваться условия переопределения, называемые в литературе интегральными условиями переопределения. Обратные коэффициентные задачи, линейные и нелинейные, с интегральными условиями переопределения достаточно хорошо изучены как для классических (эллиптических, параболических и гиперболических), так и для неклассических дифференциальных уравнений. Но для вырождающихся по временной переменной параболических уравнений обратные коэффициентные задачи с интегральным переопределением ранее не изучались.

Основная цель работы и новизна

Основная цель исследования - это вопросы разрешимости как линейных так и нелинейных обратных задач для эволюционных уравнений с вырождений.

Задачи исследования:

- доказать разрешимость линейной обратной задачи определения коэффициентов по времени для вырождающегося уравнения параболического уравнения с меняющимся направлением эволюции.
- доказать разрешимость нелинейной обратной задачи определения коэффициентов по времени для вырождающегося уравнения параболического урав-

нения с меняющим направлением эволюции.

-доказать разрешимость линейной обратной задачи определения коэффициентов пространственного типа для вырождающегося уравнения параболического уравнения с меняющим направлением эволюции.

-доказать разрешимость нелинейной обратной задачи определения коэффициентов пространственного типа для вырождающегося уравнения параболического уравнения с меняющим направлением эволюции.

-доказать единственность решений нелинейной обратной задачи определения коэффициентов пространственного типа для вырождающегося уравнения параболического уравнения с меняющим направлением эволюции.

-доказать разрешимость нелинейной обратной задачи для сильно вырождающегося параболического уравнения.

- доказать единственность решений обратной задачи для сильно вырождающегося параболического уравнения.

Объект исследования: линейные и нелинейные обратные задачи для эволюционных уравнений с вырождением.

Предмет исследования: разрешимость коэффициентных обратных задач в различных постановках для эволюционных уравнений с вырождением.

Методика исследования: В данной диссертационной работе используются методы общей теорий дифференциальных уравнений в частных производных, методы функционального и математического анализа, а также теоремы вложения. Техника доказательства существования и единственности регулярных решений для поставленных задач основана на переходе от исходной обратной задачи к новой прямой начально-краевой задаче для соответствующего интегро-дифференциального уравнения. Для установления существования решения прямой краевой (или начально-краевой) задачи в работе используются разнообразные методы, такие как метод продолжения по параметру, метод срезающих функций, метод априорных оценок и метод регуляризации.

Из существования решения прямой задачи может быть сделан вывод о существовании решения обратной задачи. Это связано с тем, что решение

прямой задачи является необходимым условием для существования решения обратной задачи, так как обратная задача предполагает восстановление параметров уравнения на основе некоторых известных данных о её поведении. Если решение прямой задачи существует, то это означает, что данные о поведении уравнения уже известны, и можно попытаться восстановить её параметры, что и является задачей обратной задачи. Однако, это не гарантирует единственности или устойчивости решения обратной задачи. Таким образом, полученные результаты о существовании решений прямых задач являются необходимым фундаментом для рассмотрения обратных задач. Они устанавливают базовую возможность восстановления параметров уравнения из известных данных о его поведении. Это связывает теорию обратных задач с теорией прямых задач и подчеркивает важность понимания обоих аспектов при решении подобных задач.

Научная новизна. Разрешимость обратных коэффициентных задач для вырождающихся дифференциальных уравнений, рассмотренных в главах §§1.1-1.2, §§2.1-2.2 и §§3.1, §§4.1, ранее не была исследована, и полученные в этой работе теоремы о разрешимости имеют самостоятельную ценность.

Теоретическая и практическая ценность работы. Результаты диссертации имеют теоретический характер. В ней используется метод срезок для нелинейного уравнения, метод приведения обратной задачи к нагруженному интегро-дифференциальному уравнению, метод регуляризации, априорных оценок, теоремы вложения для доказательства существования и единственности решения обратной задачи для вырождающегося дифференциального уравнения в частных производных. Практическая ценность данной работы определяется тем, что результаты исследования имеют прикладную значимость для решений проблем в различных областях, например, в математическом моделировании процессов теплопереноса, в проектировании технических устройств, в медицинской диагностике и т.д..

Положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся:

1) разрешимость линейной обратной задачи определения коэффициентов по времени для вырождающегося уравнения параболического уравнения с меняющимся направлением эволюции.

2) разрешимость нелинейной обратной задачи определения коэффициентов по времени для вырождающегося уравнения параболического уравнения с меняющимся направлением эволюции.

3) разрешимость линейной обратной задачи определения коэффициентов пространственного типа для вырождающегося уравнения параболического уравнения с меняющимся направлением эволюции.

4) разрешимость нелинейной обратной задачи определения коэффициентов пространственного типа для вырождающегося уравнения параболического уравнения с меняющимся направлением эволюции.

5) теоремы единственности решений нелинейных обратных задач определения коэффициентов пространственного типа для вырождающегося уравнения параболического уравнения с меняющимся направлением эволюции.

6) разрешимость нелинейной обратной задачи для сильно вырождающегося параболического уравнения.

7) теоремы единственности решений обратных задач для сильно вырождающегося параболического уравнения.

Достоверность и обоснованность проведенных исследований обеспечивается конструктивностью и систематическим использованием стандартных методов для дифференциальных уравнений частных производных. Подтверждено публикациями, представленными комитетом по контролю в сфере образования и науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан - а также подтверждается в материалах конференции.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации опубликованы в 7 статьях и 6 тезисах.

Структура диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения, а также списка литературы.